**Cuadraturas**

**Contenido**

* [Introducción](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#INTRODUCTION)
* [Método de sumas](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#THE_MATLAB_SUM_METHOD)
* [El método del punto medio](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#THE_MIDPOINT_METHOD)
* [Precisión](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#PRECISION)
* [Método trapezoidal](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#THE_TRAPEZOID_METHOD)
* [Reglas de Newton-Cotes](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#NEWTON_COTES_RULES)
* [Cuadratura de Gauss](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#GAUSS_QUADRATURE)
* [Regla compuesta de Newton-Cotes](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#COMPOSITE_NEWTON_COTES_RULES)
* [Regla compuesta de Gauss](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#COMPOSITE_GAUSS_RULES)
* [Estimación del error](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#ERROR_ESTIMATION)
* [Asignación](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-10#ASSIGNMENT)

**Introducción**

En el análisis numérico, Cuadratura  es la estimación de una integral. Se quiere integrar una función **f(x)** o un set de datos tabulados. El dominio de la integral puede ser para una intervalo finito o infinito, con forma de un rectángulo o de forma irregular, y de caracter tridimensional.

Se considerarán pruebas sencillas de precision de cada regla y se describirán (de forma sencilla) las reglas de punto medio y trapezoidal.

Se considerarán la familia de reglas de Newton-Cotes y Gauss-Legendre  y se discutirá como obtener aproximaciones más exactas al incrementar el orden de la regla o subdividiendo el intervalo. Finalmente, se revisará la estimación del error.

**El método de sumas**

El método de sumas para estimar la integral, consiste en evaluar la función en **N** puntos separados igualmente en el intervalo **[A,B]** y después multiplicar el resulado por **h**, que es el valor del intervalo entre des puntos.

Escriba una rutina llamada *matsum.m*, que debe parecerse a esto:

**function cuad = matsum ( f, a, b, n )**

El método de suma debe de parecerse a algo como esto:

h = ( b - a ) / ( n - 1 )  
xvec = ?  
fvec = ?  
quad = h \* sum ( fvec )

**Ejercicio** - Utilice su rutina escrita en MATLAB para estimar la la integral de **5\*x4** sobre el intervalo **[0,1]**, utilizando los valores de **N**, y regístrelos en la siguiente tabla:

N h Resulado de la Suma Error  
  
 2 1 ---------------------- ----------------------  
 11 0.1 ---------------------- ----------------------  
 101 0.01 ---------------------- ----------------------  
 1001 0.001 ---------------------- ----------------------

¿Qué tan rápido decrece el error con **h**?

La regla de la suma es fácil de utilizar. No es muy exacta - ni siquiera puede evaluar correctamente **f(x)=1** exactamente! Se tendrá en cuenta este método como base de comparación.

**El método del punto medio**

La regla del punto medio en un intervalo, aproxima la integral como el producto del ancho del intervalo por el valor de la función evaluada en el punto medio de dicho intervalo:

h = ( b - a )  
x = ( a + b ) / 2  
quad = h \* f(x)

Para aplicar esta regla con MATLAB, se hace necesario obtener el promedio de cada intervalo, lo que daría un nuevo set de datos de **N-1** datos.

Escriba una rutina llamada *midsum.m*, la cual debe de declararse como:

function cuad = midsum ( f, a, b, n )

La codificación puede ser como:

h = ( b - a ) / ( n - 1 )  
xvec = ?  
% reemplace los valores extremos del intervalo por los promedios  
xvec = 0.5 \* ( xvec(1:n-1) + xvec(2:n) )  
cuad = h \* sum ( fvec )

**Ejercicio:** - Utilice su rutina midsum.m para estimar la integral de **5\*x4** para **[0,1]**, utilizando los valores dados de **N**, anote el resultado y el error.

N h Resultado Puntomedio Error  
  
 2 1 ---------------------- ----------------------  
 11 0.1 ---------------------- ----------------------  
 101 0.01 ---------------------- ----------------------  
 1001 0.001 ---------------------- ----------------------

¿Qué tan rápido decrece el error con la disminución del intervalo **h**?

**Precision**

Si la regla de cuadratura puede calcular de forma exacta la integral de un polinomio de hasta un grado específico, se le llamará a este grado como "grado de precisión". En otras palabras, si la regla puede integrar correctamente una cúbica pero no asi un a cuacrática, dicha regla tiene una precisión de 3.

Para determinar el grado de precisión de una regla, se analizarán las aproximaciones de las integrales de 0 a 1 de las funciones siguientes:

p0(x) = 1  
p1(x) = 2 \* x  
p2(x) = 3 \* x2  
...  
pk(x) = ( k + 1 ) \* xk

El resultado exacto de estas funciones en el intervalo es 1.

**Ejercicio** - Para estudiar la precision de la regla del punto medio, utilice un intervalo sencillo ( **N** = 2 ), y estime la integral para las funciones de prueba en el intervalo **[0,1]**. La respuesta correcta en cada caso debería ser 1.

f Regla Punto Medio Error  
  
 1 ---------------------- ----------------------  
 2 \* x ---------------------- ----------------------  
 3 \* x^2 ---------------------- ----------------------  
 4 \* x^3 ---------------------- ----------------------

¿Cuándo los resultados dejan de ser exactos? ¿Cuál es la precisión del la regla del punto medio?

**Método trapezoidal.**

La regla trapezoidal aplicada a un intervalo establece la multiplicación del ancho del intervalo por el promedio de los extremos:

h = ( b - a )  
Q = h \* ( f(a) + f(b) )/2

Para aplicar la regla trapezoidal compuesta, se necesitan generar **N** puntos y evaluar la función en cada uno de esos puntos. Esto se asemeja a la regla de la suma que se discutió anteriormente solo que los valores extremos están multiplicados por un factor de (1/2) en vez de 1. Esta cantidad realiza una pequeña corección a la regla de la suma.

Escriba la rutina llamada *trapsum.m*, que debe de estar declarada como:

function quad = trapsum ( f, a, b, n )

La codificación debe ser algo parecida a esto:

h = ( b - a ) / ( n - 1 )  
xvec = ?  
fvec = ?  
quad = h \* ( sum ( fvec ) - 0.5 \* ( fvec(1) + fvec(n) ) )

**Ejercicio** - Utilice la regla trapezoidal para estimar la integral de **5\*x4** en el intervalo **[0,1]**, utilizando los valores de **N**, y anote los resultado y el error.

N h R. Trapezoidal Error  
  
 2 1 ---------------------- ----------------------  
 11 0.1 ---------------------- ----------------------  
 101 0.01 ---------------------- ----------------------  
 1001 0.001 ---------------------- ----------------------

¿Qué tan rápido decrece el error al decrecer **h**? Compare los resultados con la regla de la suma, la cual difiere de la regla trapezoidal por el factor de corrección.

**Regla de Newton-Cotes**

La fórmula de Newton-Cotes formula utiliza la idea siguiente: si es razonable aproximar una función por medio de una función interpolante, entonces, es razonable aproximar la integral de esta función con la integral de su interpolante. Por ejemplo, la regla trapezoidal es la fórmula de Newton-Cotes de orden 2,  derivada al integrar el interpolante lineal de una función.

Si la fórmula de Newton-Cotes (sobre un inervalo sencillo) se aplica a **N** puntos de la función, el interpolante será exacto para cualquier polinomio de **N-1** o menos puntos, lo que hace a la integral aproximadamente exacta.T Por tanto,  la regla de Newton-Cotes de orden **N** tiene una precision de al menos **N-1**.

Escriba una rutina llamada *ncsum.m*, la cual se debe declararse como:

function quad = ncsum ( f, a, b, n )

La codificación debe de salir como:

h = ( b - a ) *% Cuidado! El intervalo no esta dividido entre (n-1)!*  
x = linspace ( a, b, n )  
wvec = nc\_peso ( n )  
fvec = ?  
cuad = h \* wvec' \* fvec' *% Ambas transpuestas.*

La rutina *nc\_pesos.m* regresa los coeficientes de Newton-Cotes  para la regla del orden establecido. Puede obtenerla de la página web.

**Ejercicio** - Utilice los métodos de Newton-Cotes para estimar la integral de **5\*x4** sobre el intervalo **[0,1]**, utilizando los datos de los valores de **N**, evalúe y anote el error.

N h Resultado de N.-C. Error  
  
 2 1.0 ---------------------- ----------------------  
 3 0.5 ---------------------- ----------------------  
 4 0.33 ---------------------- ----------------------  
 5 0.25 ---------------------- ----------------------

Desafortunadamente, "más preciso" no garantiza que sea "más exacto"! Si una regla es "más precisa" que otra, entonces esta última puede integrar exactamente un polinomio de mayor grado. Esto le prodría sujerir que para cualquier función, si se quiere aproximar mejor la integral, se podrían utilizar los métodos de  Newton-Cotes de mayor precision.

La regla de Newton-Cotes **no** tiene una propiedad muy deseable. La secuencia de las aproximaciones de la integral no garantiza que converja al valor de la integral. Tome en cuenta este ejemplo para revisar esto.

**Ejercicio**: Considere la función Runge definida por **1/(1+x^2)** en el intervalo [-4,4]. La solución exacta es: **2\*atan(4)**. Utilice la regla con incremento de orden,  y para cada caso anote el resultado y el error.

N h Resultado de N.-C. Error  
  
 3 4.0 ---------------------- ----------------------  
 5 2.0 ---------------------- ----------------------  
 9 1.0 ---------------------- ----------------------  
 17 0.5 ---------------------- ----------------------

Al utilizar una regla de Newton-Cotes significa en el incremento del polinomio de interpolación con nodos iguelmente espaciados. ¿Cuándo se utilizó esta idea, y qué resultados se obtubieron?

**Cuadratura de Gauss**

En tiempos anteriores a las calculadoras y computadoras, la aritmética se realizaba a mano, y es por eso que las personas hacian lo que fuera para encontrar una forma más efectiva para reducir los cálculos. Gauss, en particular, tenía que calcular aproximadamente muchas integrales. El conocia las fórmulas de Newton-Cotes, pero descubrió que se prodía aproximar una integral al utilizar menos puntos, si se sustituían los puntos igualmente espaciados por puntos cuya localización se determinarían de otra manera.

*(Los puntos de Gauss son realmente los valores en donde el polinomio de Legendre ses cero.  Si tiene oportunidad, grafique el polinomio de Legrndre de grado 5 y observe los valores de las cinco abcisas de dicho polinomio en la rutina gl\_space.m .)*

Escriba una rutina llamada *glsum.m*, la cual debe estar declarada como sigue:

**function quad = glsum ( f, a, b, n )**

La codificación debe ser algo parecido a:

h = ( b - a ) / 2 % Esta h es diferente*!*  
 wvec = gl\_peso ( n )  
 xvec = gl\_space ( a, b, n )  
 fvec = ?  
 cuad = h \* wvec' \* fvec' % Ambos transpueta

Los pesos se calculan en la rutina *gl\_pesos.m*, y as abcisas con *gl\_space.m*, ambas en el sitio web.

**Ejercicio** - Utilice los métodos de Gauss-Legendre para estimar la integral de **5\*x4** en el intervalo **[0,1]**, utilizando los valores de **N**. Anote el resultado y el error.

N Resultado G.-L. Result Error  
  
 1 ---------------------- ----------------------  
 2 ---------------------- ----------------------  
 3 ---------------------- ----------------------  
 4 ---------------------- ----------------------

¿Qué tan rápido decrece el error con el aumento de **N**?

A diferencia de la regla de Newton-Cotes, la regla de Gauss-Legendre si tiene la propiedad, en general, de al aumentar el orden, la integral convergerá a la solución.

**Ejercicio**: Considere la función Runge **1/(1+x^2)** en el intervalo **[-4,4]**. La solución exacta es: **2\*atan(4)**. Utilice la regla para encontrar la solución. Anote los resultados y el error.

N Resultado Gauss-Legendre Error  
  
 1 ---------------------- ----------------------  
 2 ---------------------- ----------------------  
 4 ---------------------- ----------------------  
 8 ---------------------- ----------------------

**Regla compuesta de Newton-Cotes**

Mientras se mantenga bajo el orden, se puede utilizar la regla de Newton-Cotes. Pero si se quiere más exactitud en la integración, no se puede aumentar el orden, ya que los resultados no son exactos. La solución es aplicar la regla compuesta.  Lo que se hace en dividir el intervalo **[A,B]** en **M** subintervalos y utilizar la regla repetidamente para cada subintervalo. Si la regla utiliza **N** puntos, entonces se necesita un total de **M\*(N-1)+1** puntos iguelmente espaciados. La forma más sencila de organizar estos cálculos, es el de obtener los límites de dichos subintervalos y llamar la rutina que se escribió anteriormente.

Escriba una rutina llamada, *comp\_ncsum.m*,

function cuad = comp\_ncsum ( f, a, b, n, m )

la cual aproxime la integral de **f(x)** en el intervalo **[A,B]** y que utilice la regla de Newton-Cotes de orden **N**, y además, divida el intervalo en **M** subintervalos. Esta puede ser como:

ends = linspace ( a, b, m+1)  
  
 cuad = 0  
 for i = 1 to m  
 cuad = cuad + ncsum ( f, ends(i), ends(i+1), n )

Observe que se están calculando **M+1** puntos en intervalo, lo que define **M** subintervalos.

**Ejercicio**: considere la función Runge **1/(1+x^2)** en el intervalo **[-4,4]**. La solución exacta de la integral es **2\*atan(4)**. Utilice la regla compuesta de orden **N**, con **M** intervalos, y para cada caso registre la respuesta y el error.

N M Newton-Cotes Compuesta Error  
  
 2 4 ---------------------- ----------------------  
 2 8 ---------------------- ----------------------  
 2 16 ---------------------- ----------------------  
  
 3 4 ---------------------- ----------------------  
 3 8 ---------------------- ----------------------  
 3 16 ---------------------- ----------------------

**Regla de Gauss compuesta**

Esta regla se puede utilizar organizar como la anterior regla, excepto que los puntos no están iguelmente espaciados.

Escriba una rutine llamada, *comp\_glsum.m*:

function cuad = comp\_glsum ( f, a, b, n, m )

la cual aproxime la integrad de **f(x)** en el intervalo **[A,B]** utilice la regla de Gauss-Legendre de orden **N** y que subdivida del intervalo en **M** subintervalos. La rutina  tendría la orma como sigue:

ends = linspace ( a, b, m+1)  
  
cuad = 0  
for i = 1 to m  
cuad = cuad + glsum ( f, ends(i), ends(i+1), n )

**Ejercicio**: Considere la función Runge **1/(1+x^2)** en el intervalo [-4,4]. La solución exacta es **2\*atan(4)**. Utilice la regla compuesta de Gauss-Legendre de orden **N**, con **M** intervalos, y calcule para cada caso la solucion y el error.

N M Gauss-Legendre Compuesta Error  
  
 2 4 ---------------------- ----------------------  
 2 8 ---------------------- ----------------------  
 2 16 ---------------------- ----------------------  
  
 3 4 ---------------------- ----------------------  
 3 8 ---------------------- ----------------------  
 3 16 ---------------------- ----------------------

**Estimación del error**

Para aproximar el error, se hacen dos estimados de la integral, de tal maner a que el segundo estimado sea más esacto. Se podría, por ejemplo, comparar dos reglas de diferente orden, o dos reglas compuestas, una que utilice el doble de subintervalos. En ámbos casos, la diferencia de dos aproximaciones de la integral es un estimado del error.

**Ejercicio**: Considere la función Runge **1/(1+x^2)** en el intervalo **[-4,4]**. La solcuión exacta es **2\*atan(4)**. Calcule con el método de suma, la solución a la integral, para los puntos indicados. Utilice la diferencia entre el primer resultado y el segundo para establecer el error de la primera suma. y así sucesivamente para todos los valores.

N Regla de la Suma Error estimado Error verdadero  
  
   
 2 ----------------- -------------- -----------  
  
 5 ----------------- -------------- -----------  
  
 17 ----------------- -------------- -----------  
  
 65 ----------------- -------------- -----------  
  
 257 ----------------- -------------- -----------

**Asignación**

Utilice cualquier método discutido en el laboratorio para estimar la integral en el intervalo **[-1,1]** de la función siguiente:

**f(x) =** 0.92 \* cosh ( x ) - cos ( x )

1) Imprima este laboratorio con los resultados escritos a mano.

2) Envie un correo con la regla utilizada para resolver esta integración. En el mismo debe de establecer el orden **N**, el número de subintervalos **M**, y el valor estimado de la integral. **Su estimado de la integral debe de estar dentro de las primeras tres cifras significativas**.